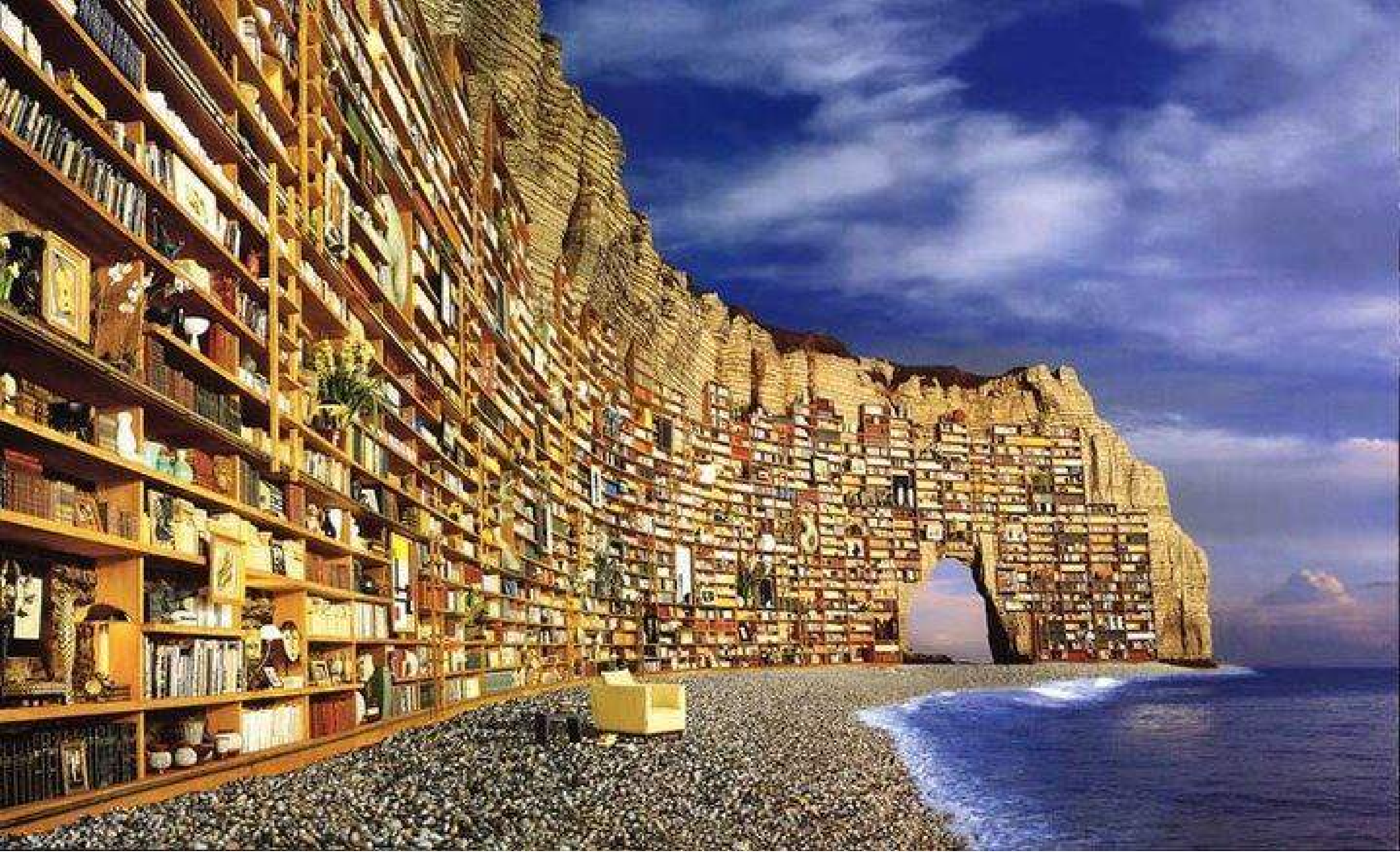
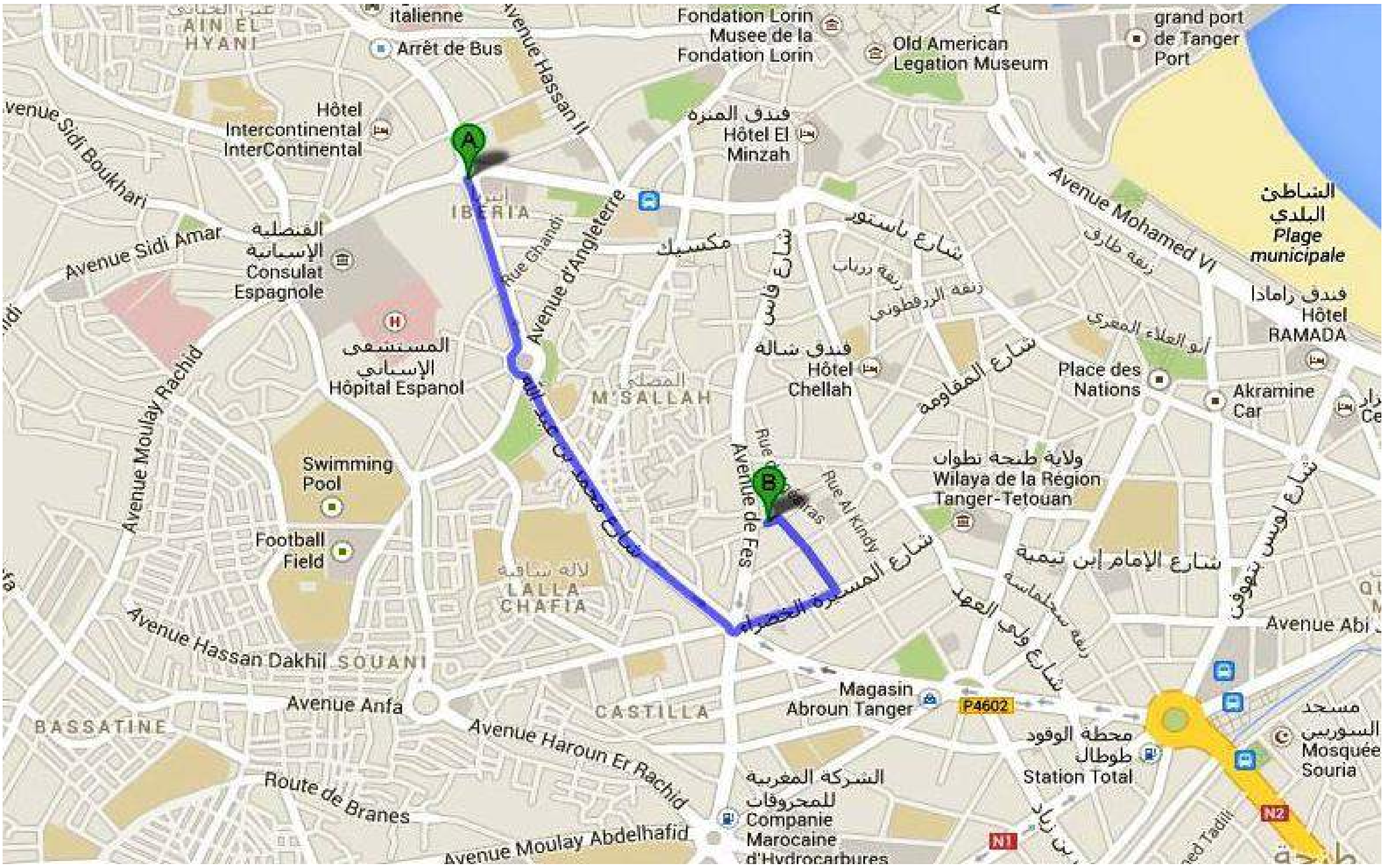


http://al9ahira.com/



Itinéraire d'accès à Al9ahira (point B sur la carte) en partant de la Place Ibéria

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques

$1^{ère}$ partie : Modèle de conducteur métallique-Conducteur parfait

1.1 Effet de peau

1.1.1 en régime harmonique $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \times i\omega$

soit $r = \frac{|\underline{\vec{j}}_D|}{|\underline{\vec{j}}|} = \frac{|\frac{i\omega}{\mu_0 c_0^2}\underline{\vec{E}}|}{|\sigma\underline{\vec{E}}|} = \frac{\omega}{\sigma\mu_0 c_0^2}$

A.N : $r = 9.1\ 10^{-9} \ll 1$ donc $\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligé devant $\mu_0\vec{j}$

1.1.2 (M-A) se simplifie $\overrightarrow{rot}\vec{B} \approx \mu_0\vec{j}$

1.1.3 l'onde incidente et réfléchie étant de pulsation ω , la relation de passage à la surface du conducteur ne sera vérifiée pour un instant quelconque que si l'onde transmise est de même pulsation $\omega' = \omega$

1.1.4 le système $\{onde\ incidente + conducteur\}$ est invariant par translation selon Ox et Oy donc $\underline{\vec{E}}_t$ ne dépend que de z (l'onde transmise est plane)

par l'équation (M-G) $div\vec{E}_t = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ on obtient $\frac{dE_{tz}}{dz} = 0$ en excluant les solutions qui ne se propagent pas de z (il faut temps+espace), il vient $\vec{E}_t = E_{tx}\vec{u}_x + E_{ty}\vec{u}_y$

la relation de passage , en z=0 , du champ électrique permet d'écrire que $E_i\vec{u}_y + E_r\vec{u}_y - \vec{E}_t = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{z}$ donne , par projection , $\boxed{\vec{E}_t = E_t(z)\vec{u}_y}$

1.1.5 à l'intérieur du conducteur, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$div\underline{\vec{E}}_t = 0$$

$$div\underline{\vec{B}}_t = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}}_t = \mu_0\sigma\underline{\vec{E}}_t$$

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}}_t = -\frac{\partial\underline{\vec{B}}_t}{\partial t}$$

donc :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}}_t) = \overrightarrow{grad}\underbrace{div\underline{\vec{E}}_t} - \Delta\underline{\vec{E}}_t = -\ \mu_0\sigma\frac{\partial\underline{\vec{E}}_t}{\partial t}$$

or $\underline{\vec{E}}_t(M,t) = \underline{\vec{E}}_t(M)\exp -i\omega t$ soit :

$$\Delta\underline{\vec{E}}_t(M)\exp -i\omega t = \mu_0\sigma\ (-i\omega)\underline{\vec{E}}_t(M)\exp -i\omega t \Rightarrow \Delta\underline{\vec{E}}_t(M) + i\mu_0\sigma\omega\underline{\vec{E}}_t(M) = \vec{0}$$

1.1.6 on a $\Delta \equiv \frac{d^2}{dz^2}$, par projection sur $\vec{u}_y$ du résultat 1.1.5, il vient :

$$\frac{d^2\underline{E}_t(z)}{dz^2} + i\mu_0\sigma\omega\underline{E}_t(z) = 0$$

soit : $\underline{k}_t^2 = i\mu_0\sigma\omega$

1.1.7 on a $i = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2$ donc on peut écrire $\underline{k}_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}\ (i+1)$

d'où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

1.1.8 la solution de l'équation (5) s'écrit :

$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp i\underline{k}_t z + \underline{B} \exp -i\underline{k}_t z = \underline{A} \exp \frac{i-1}{\delta} z + \underline{B} \exp \frac{-i+1}{\delta} z$$

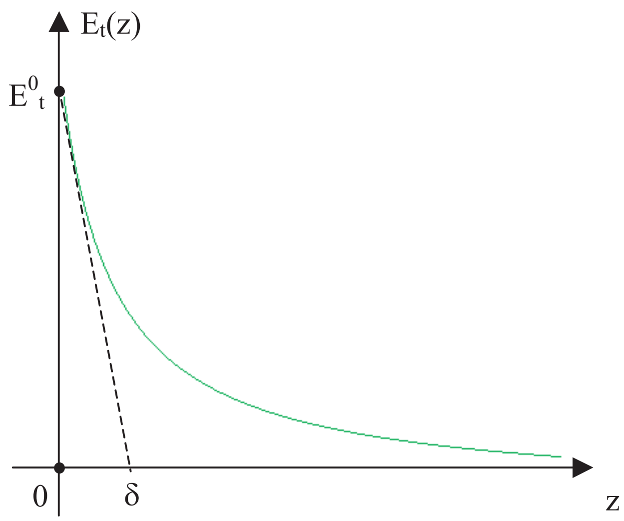
$|\underline{E}_t(z)|$ doit être fini pour $z \to +\infty$ (trés loin dans le conducteur) donc $\underline{B} \equiv 0$

donc :

$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp \frac{i-1}{\delta} z = E_t^0 \exp -i\varphi \exp \frac{i-1}{\delta} z$$

avec $E_t^0 > 0$

1.1.9 le module de $\underline{E}_t(z)$ s'écrit $E_t(z) = |\underline{E}_t(z)| = E_t^0 \exp -\frac{1}{\delta} z$



δ caractérise la distance d'atténuation du champ à l'intérieur du conducteur. (au bout de 5δ le champ est quasi-nul)

1.1.10 A.N : $\delta = 2\ 10^{-5} m$

1.1.11 on a : $\underline{\vec{E}}_t(M,t) = E_t^0 \exp -i\varphi \exp i\underline{k}_t z\ \ \exp -i\omega t\ \vec{u}_y = E_t^0\ e^{i(\underline{k}_t z - \omega t - \varphi)}\ \vec{u}_y$

qui est une onde plane (atténuée), donc l'équation de MAXWELL-FARADAY donne :

$$\underline{\vec{B}}_t(M,t) = \frac{\underline{k}_t \vec{u}_z \times \underline{\vec{E}}_t(M,t)}{\omega} = -\frac{(1+i)}{\omega\ \delta}\ E_t^0\ \exp(-z/\delta)\ e^{i(z/\delta - \omega t - \varphi)}\ \vec{u}_x$$

1.2 Modèle de conducteur parfait

1.2.1 en hautes fréquences $\omega \to +\infty$ on a $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \to 0^+$

1.2.2 à l'intérieur du conducteur parfait : $z > 0$ et $\delta \to 0^+$

donc

$$|\underline{\vec{E}}_t| \sim \exp(-z/\delta) \equiv 0$$

ainsi que

$$|\underline{\vec{B}}_t| \sim \frac{\exp(-z/\delta)}{\delta} \equiv 0$$

1.2.3 d'aprés l'énoncé $\rho \equiv 0$ et on a :

$$|\underline{\vec{j}}| = \sigma|\underline{\vec{E}}_t| \sim \frac{\exp(-z/\delta)}{\delta^2} \equiv 0$$

1.2.4 un éventuel excès de charges ou un courant sera à la surface du conducteur parfait.

1.2.5 on a :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \rho_s/\varepsilon_0\vec{n}$$

et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\vec{j}_s \times \vec{n}$$

soit les quatres relations :

continuité de la composant tangentielle de $\vec{E}$: $E_{2t} = E_{1t}$

continuité de la composant normale de $\vec{B}$: $B_{2n} = B_{1n}$

discontinuité de la composant normale de $\vec{E}$: $E_{2n} - E_{1n} = \rho_s/\varepsilon_0$

discontinuité de la composant tangentielle de $\vec{B}$: $B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s$

1.2.6 pour un conducteur parfait $\vec{E}_1 \equiv \vec{0}$ et $\vec{B}_1 \equiv \vec{0}$, siot :

$E_{2t} = 0$, $B_{2n} = 0$, $E_{2n} = \rho_s/\varepsilon_0$ et $B_{2t} = \mu_0 j_s$

1.2.7 $\forall \rho_s, j_s$ on aura :

continuité de la composant tangentielle de $\vec{E}$: $E_{2t} = 0$

continuité de la composant normale de $\vec{B}$: $B_{2n} = 0$

$2^{ème}$ partie : Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire

2.1 Onde transverse électrique TE

2.1.1 à l'intérieur du guide sans charges, ni courants volumiques , $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$div\underline{\vec{E}} = 0$$

$$div\underline{\vec{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

donc :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}}) = \overrightarrow{grad}(\underbrace{div\underline{\vec{B}}}) - \Delta\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\overrightarrow{rot}(\underline{\vec{E}})}{\partial t} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{B}}}{\partial t^2}$$

soit : l'équation de D'alambert

$$\Delta\underline{\vec{B}} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

par projection sur $\vec{u}_z$, il vient :

$$\Delta\underline{B}_z - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\underline{B}_z}{\partial t^2} = 0$$

or

$$\underline{B}_z = \underline{B}_{0z}(x,y)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

soit :

$$\frac{\partial^2\underline{B}_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\underline{B}_{0z}}{\partial y^2} + (\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2)\underline{B}_{0z} = 0$$

2.1.2 on a : $\underline{B}_{0z}(x,y) = (\underline{A}_1 \cos\alpha x + \underline{A}_2 \sin\alpha x)(\underline{B}_1 \cos\beta y + \underline{B}_2 \sin\beta y)$ est solution si elle vérifie l'équation de propagation 2.1.1

on a : $\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial x^2} = -\alpha^2\ \underline{B}_{0z}$ et aussi $\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial y^2} = -\beta^2\ \underline{B}_{0z}$

donc, la condition s'écrit : $(-\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2)\ \underline{B}_{0z} = 0$

comme l'onde TE n'est pas trnsverse magnétique donc $\underline{B}_{0z} \neq 0$

soit la relation demandée :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \beta^2$$

2.1.3 MAXWELL-FARADAY s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{\underline{E}} = -\frac{\partial \vec{\underline{B}}}{\partial t} \Longrightarrow \left|\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix} \underline{E}_{0x}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ 0 \end{matrix}\right. = +i\omega \left|\begin{matrix} \underline{B}_{0x}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0y}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0z}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \end{matrix}\right. \Longrightarrow \left|\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_g \end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ 0 \end{matrix}\right. = i\omega \left|\begin{matrix} \underline{B}_{0x} \\ \underline{B}_{0y} \\ \underline{B}_{0z} \end{matrix}\right.$$

de même MAXWELL-AMPERE s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{\underline{B}} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} \Longrightarrow \left|\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix} \underline{B}_{0x}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0y}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0z}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \end{matrix}\right. = \frac{-i\omega}{c_0^2} \left|\begin{matrix} \underline{E}_{0x}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y}\ e^{i(k_g z - \omega t)} \\ 0 \end{matrix}\right. \Longrightarrow \left|\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_g \end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix} \underline{B}_{0x} \\ \underline{B}_{0y} \\ \underline{B}_{0z} \end{matrix}\right. = \frac{-i\omega}{c_0^2} \left|\begin{matrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ 0 \end{matrix}\right.$$

par projection de M-A sur $\vec{u}_x$ on a :

$$\frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} - ik_g\ \underline{B}_{0y} = \frac{-i\omega}{c_0^2}\ \underline{E}_{0x}$$

et par projection de M-F sur $\vec{u}_y$, pour éliminer $\underline{B}_{0y}$, on a :

$$ik_g\ \underline{E}_{0x} = i\omega\ \underline{B}_{0y}$$

On en déduit :

$$\underline{E}_{0x} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2}\ \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$$

2.1.4 de même par projection de M-A sur $\vec{u}_y$ on a :

$$ik_g\ \underline{B}_{0x} - \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x} = \frac{-i\omega}{c_0^2}\ \underline{E}_{0y}$$

et par projection de M-F sur $\vec{u}_x$, pour éliminer $\underline{B}_{0x}$, on a :

$$-ik_g\ \underline{E}_{0y} = i\omega\ \underline{B}_{0x}$$

On en déduit :

$$\underline{E}_{0y} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2}\ \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

2.1.5 tenant compte de 2.1.2, on a :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0x} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2}\ \beta\ \ (\underline{A}_1 \cos\alpha x + \underline{A}_2 \sin\alpha x)(-\underline{B}_1 \sin\beta y + \underline{B}_2 \cos\beta y) \\ \underline{E}_{0y} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2}\ \alpha\ \ (-\underline{A}_1 \sin\alpha x + \underline{A}_2 \cos\alpha x)(\underline{B}_1 \cos\beta y + \underline{B}_2 \sin\beta y) \end{cases}$$

2.1.6 d'aprés 1.2.7 en $x=0$ ou $x=a$, on aura $\underline{E}_{0y}(x=0,y)=0$ et $\underline{E}_{0y}(x=a,y)=0$
de même en $y=0$ ou $y=b$, on aura $\underline{E}_{0x}(x,y=0)=0$ et $\underline{E}_{0x}(x,y=b)=0$
donc
$$\underline{E}_{0y}(x=0,y)=0 \Longrightarrow \underline{A}_2=0$$
car y est quelconque entre 0 et b.
et
$$\underline{E}_{0x}(x,y=0)=0 \Longrightarrow \underline{B}_2=0$$
car x est quelconque entre 0 et a.
soit :
$$\underline{B}_{0z}(x,y)=\underline{A}_1\ \underline{B}_1\ \cos\alpha x\ \cos\beta y$$
comme l'onde TE n'est pas trnsverse magnétique donc $\underline{B}_{0z}\neq 0 \Longrightarrow \underline{A}_1\neq 0$, et $\underline{B}_1\neq 0$
et puis
$$\underline{E}_{0y}(x=a,y)=0 \Longrightarrow \underline{A}_1\underline{B}_1\ \sin\alpha a=0 \Longrightarrow \alpha=m\pi/a$$
avec $m\in IN$ et
$$\underline{E}_{0x}(x,y=b)=0 \Longrightarrow \underline{A}_1\underline{B}_1\ \sin\beta b=0 \Longrightarrow \beta=n\pi/b$$
avec $n\in IN$, d'où :
$$\underline{B}_{0z}(x,y)=\underline{A}_1\ \underline{B}_1\ \cos\frac{m\pi x}{a}\ \cos\frac{n\pi y}{b}$$

2.1.7 il vient :
$$\begin{cases} \underline{E}_{0x} = -\ \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2}-k_g^2}\ \ (\frac{n\pi}{b})\ \ \underline{A}_1\underline{B}_1\cos\alpha x\sin\beta y \\ \underline{E}_{0y} = -\ \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2}-k_g^2}\ \ (\frac{m\pi}{a})\ \ \underline{A}_1\underline{B}_1\sin\alpha x\cos\beta y \end{cases}$$
donc :
$$\underline{A}_{mn}=\frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2}-k_g^2}\ \ (\frac{n\pi}{b})\ \ \underline{A}_1\underline{B}_1$$
et
$$\underline{B}_{mn}=\frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2}-k_g^2}\ \ (\frac{m\pi}{a})\ \ \underline{A}_1\underline{B}_1$$

2.1.8 d'aprés 2.1.2 :
$$k_g^2=\frac{\omega^2}{c_0^2}-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2$$
donc :
$$k_{g,mn}=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2}-\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})}$$
pour une onde progressive vers les $z>0$:
$$k_{g,mn}=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2}-\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})}>0$$

2.1.9 il y a propagation si $k_{g,mn}$ est réel càd :
$$\frac{\omega^2}{c_0^2}>\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}) \Longrightarrow \omega>\omega_c=\pi c_0\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$
Le guide est un filtre passe-haut des ondes TE, de fréquence de coupure $\nu_c=\frac{\omega_c}{2\pi}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$
Si $\nu<\nu_c$ alors $k_g=i|k_g|$, il y aura atténuation de l'onde le long du guide car le terme de phase $e^{i(k_gz-\omega t)}=\exp(-|k_g|z)\ e^{-i\omega t}$

2.1.10 dans le guide, on a :

$$\lambda_{g,mn} = \frac{2\pi}{k_{g,mn}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})}}$$

dans le vide $\lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega}$ donc :

$$\lambda_{g,mn} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4}(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})}}$$

2.2 Onde transverse magnétique TM

2.2.1 si $m = 0$ et $n \neq 0$, on aura : $k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$, le dénominateur dans l'expression de l'onde TM_{mn} est non nul : $\omega^2 - c_0^2 k_{g,mn}^2 = (\frac{\pi n c_0}{a})^2 \neq 0$
il reste donc, $m = 0$:

$$TM_{mn} \begin{cases} \underline{E}_{0x,mn} = 0 \\ \underline{E}_{0y,mn} = 0 \\ \underline{E}_{0z,mn} = 0 \end{cases}$$

ce qui absurde !
de même si $m \neq 0$ et $n = 0$, donc pour que l'onde TM_{mn} existe il faut à la fois $n \neq 0$ et $m \neq 0$

2.3 Sélection des modes de propagation par le guide d'ondes

2.3.1 :

$$TE_{10} \Longrightarrow \nu_{c10} = \frac{c_0}{2a} = 6,56\ GHz$$
$$TE_{01} \Longrightarrow \nu_{c01} = \frac{c_0}{2b} = 14,8\ GHz$$
$$TE_{11} \Longrightarrow \nu_{c11} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,2\ GHz$$
$$TM_{11} \Longrightarrow \nu_{c11} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,2\ GHz$$
$$TE_{20} \Longrightarrow \nu_{c20} = \frac{c_0}{a} = 13,1\ GHz$$

2.3.2 d'aprés 2.1.9 il faut avoir :

$$6,56\ GHz \leq \nu < 14,8\ GHz$$

ainsi les modes TE_{01}, TE_{11} et TM_{11} ne peuvent pas se propager dans le guide car $\nu < \nu_{cmn}$.

2.3.3 on a : $v_\varphi = \frac{\omega'}{k_g}$, à la pulsation $\omega' = 2\pi\nu'$, donc :

$$v_\varphi(TE_{10}) = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_0^2} - \pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{0}{b^2})}} = 3,4\ 10^8 m.s^{-1}$$

$$v_\varphi(TE_{20}) = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_0^2} - \pi^2(\frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2})}} = 8,6\ 10^8 m.s^{-1}$$

les deux vitesses de phases sont tel que : $v_\varphi(TE_{20}) > v_\varphi(TE_{10}) > c_0$, car la phase de l'onde en physique n'est ni matière ni énergie !

2.3.4 le mode TE_{20} est plus rapide que TE_{10}, le signal formé par combinaison des deux modes sera déformé à la sortie du guide, car $v_\varphi(TE_{20}) \approx 2v_\varphi(TE_{10})$

$3^{ème}$ partie :
Guide d'ondes monomode TE_{10}

3.1 Sélection du mode du travail

3.1.1 un guide d'onde est un filtre passe-haut vis à vis d'un mode (m,n) donc pour sélectionner un seul mode il faut choisir la fréquence du générateur d'onde (ex : klystron) entre les deux premières fréquences de coupure ainsi d'aprés 2.3.1 :

$$\nu_{min} = inf(\nu_{mn}) = \nu_{10} = \frac{c_0}{2a}$$

et

$$\nu_{max} = inf(\nu_{01}, \nu_{11}, \nu_{20}) = \nu_{20} = \frac{c_0}{a}$$

3.1.2 on a :

$$\nu_{10} = 6,56\ GHz < \nu = 9.67\ GHz < 13.1\ GHz < \nu_{mn}$$

d'où le seul mode sélectionné est : TE_{10}

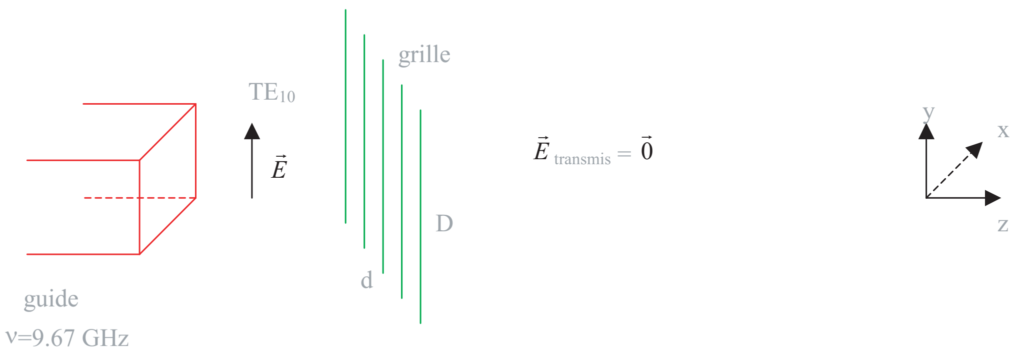
3.1.3 pour TE_{10} , $m = 1$ et $n = 0$, d'après 2.1.7 :

$$\begin{cases} \underline{E}_x = 0 \\ \underline{E}_y = \frac{i\omega a}{\pi} \quad \underline{A}_1\underline{B}_1 \quad \sin(\frac{\pi x}{a}) \quad \exp i(k_g z - \omega t) \\ \underline{E}_z = 0 \end{cases}$$

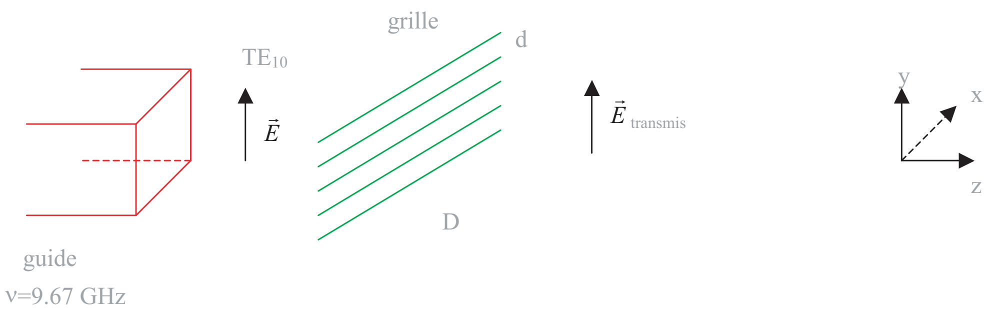
qui est une onde polarisée rectiligne selon Oy.

3.1.4 on a : $d < D$, la fréquence de coupure la plus basse de la grille (ensemble de guides) est donnée par : $\nu_c = \frac{c_0}{2D}$ qui doit être suffisamment faible ($\nu_c < 9.67\ GHz$)

cas 1 : $\vec{u}//\vec{u}_y$



cas 2 : $\vec{u}//\vec{u}_x$



la grille est un milieu anisotrope conducteur parfait selon $\vec{u}$ et isolant parfait selon $\vec{u}'$.
la composante de $\vec{E}$ selon $\vec{u}$ sera absorbée (effet de peau). En fait le champ perd son énergie en créant un courant (mouvement des électrons) selon $\vec{u}$.

3.1.5 c'est la loi de Malus.

3.1.6 pour d suffisamment élevé le champ $\vec{E}$ sera transmis quelque soit l'orientation de la grille car $\nu > \frac{c_0}{d} > \frac{c_0}{D}$.

la valeur critique d_c est donnée par :

$$d_c = \frac{c_0}{\nu} = 3.1\ cm$$

3.2 Mesure de la fréquence

3.2.1 fréquence-mètre et oscilloscope.

3.2.2 à une fréquence $\nu = 9.67\ GHz$, pour satisfaire l'ARQS la dimension r du circuit de mesure (fils de connexion) doit être : $r \ll c_0.T = 3.1\ cm$ ce qui est absurde !

3.2.3 on remplace $E(x,y,z,t) = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t)$ dans l'équation de D'Alambert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

soit :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

3.2.4 les conditions aux limites sur les parois s'écrivent :

$$E(x=0,y,z) = 0 \quad ; \quad E(x=\ell_x,y,z) = 0$$
$$E(x,y=0,z) = 0 \quad ; \quad E(x,y=\ell_y,z) = 0$$
$$E(x,y,z=0) = 0 \quad ; \quad E(x,y,z=\ell_z) = 0$$

on en déduit : $k_x\ \ell_x = n_x\pi$; $k_y\ \ell_y = n_y\pi$ et $k_z\ \ell_z = n_z\pi$ tels que : $n_x\ n_y\ n_z \neq 0$ (sinon $E \equiv 0$)

3.2.5 on a d'après 3.2.3 : $\omega = c_0\ \pi\ \sqrt{(\frac{n_x}{\ell_x})^2 + (\frac{n_y}{\ell_y})^2 + (\frac{n_z}{\ell_z})^2}$

la valeur minimale : $\omega_f = c_0\ \pi\ \sqrt{(\frac{1}{\ell_x})^2 + (\frac{1}{\ell_y})^2 + (\frac{1}{\ell_z})^2}$

A.N : $\nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi} = 10.3\ \ GHz$

3.2.6 En plaçant un détecteur de champ E dans la cavité, on distingue facilement :

$\nu < \nu_f(\ell)$, le détecteur mesurera $E = 0$.

$\nu > \nu_f(\ell)$, le détecteur mesurera $E \neq 0$.

il suffit de noter la valeur d'apparition du champ : $\nu = \frac{c_0}{2}\ \sqrt{2(\frac{1}{\ell_x})^2 + (\frac{1}{\ell})^2}$

3.2.7 on a : $\nu = \frac{c_0}{2}\ \sqrt{2(\frac{1}{\ell_x})^2 + (\frac{1}{\ell})^2} \Rightarrow \ell = 2.27\ cm$

3.3 Couplage du guide d'ondes à une charge

3.3.1 pour pouvoir dire que le conducteur occupe le demi-espace $z > L$, mais surtout pour ne pas faire intervenir l'onde qui sera réfléchie en $z = L + e$!

3.3.2 comme les ondes ici ne sont pas planes, on doit écrire (M-F) :

$$-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}}$$

soit :

$$\underline{\vec{B}}_i = -\frac{1}{-i\omega}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ E_i^0\ \sin\frac{\pi x}{a}\ \exp i(k_g z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{k_g E_i^0}{\omega}\ \sin\frac{\pi x}{a}\ \exp i(k_g z - \omega t) \\ 0 \\ -i\ \frac{\pi E_i^0}{a\omega}\ \cos\frac{\pi x}{a}\ \exp i(k_g z - \omega t) \end{vmatrix}$$

de même :

$$\underline{\vec{B}}_r = -\frac{1}{-i\omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ 0\\ -ik_g\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}0\\ \underline{E}_r^0 \ \sin\frac{\pi x}{a} \ \exp -i(k_g z+\omega t)\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{k_g\underline{E}_r^0}{\omega} \ \sin\frac{\pi x}{a} \ \exp -i(k_g z+\omega t)\\ 0\\ -i \ \frac{\pi \underline{E}_r^0}{a\omega} \ \cos\frac{\pi x}{a} \ \exp -i(k_g z+\omega t)\end{vmatrix}$$

et finalement, puisque :

$$\exp -\frac{z}{\delta} \quad \exp i(\frac{z}{\delta}-\omega t) = \exp i(\frac{1+i}{\delta}z-\omega t)$$

donc :

$$\underline{\vec{B}}_t = -\frac{1}{-i\omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ 0\\ i \ \frac{1+i}{\delta}\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}0\\ \underline{E}_t^0 \ \sin\frac{\pi x}{a} \ \exp i(\frac{1+i}{\delta}z-\omega t)\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-\frac{(1+i)\underline{E}_t^0}{\delta\omega} \ \sin\frac{\pi x}{a} \ \exp -\frac{z}{\delta} \ \exp i(\frac{z}{\delta}-\omega t)\\ 0\\ -i \ \frac{\pi \underline{E}_t^0}{a\omega} \ \cos\frac{\pi x}{a} \ \exp -\frac{z}{\delta} \ \exp i(\frac{z}{\delta}-\omega t)\end{vmatrix}$$

3.3.3 la continuité de la composante tangentielle $\vec{E}.\vec{u}_y$ en $z=L$ s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}_i(x,y,L,t).\vec{u}_y + \underline{\vec{E}}_r(x,y,L,t).\vec{u}_y = \underline{\vec{E}}_t(x,y,L,t).\vec{u}_y$$

en simplifiant :

$$E_i^0 \exp ik_g L + \underline{E}_r^0 \exp -ik_g L = \underline{E}_t^0 \exp -\frac{L}{\delta} \quad \exp i\frac{L}{\delta}$$

3.3.4 la plaque ayant une conductivité σ finie permet l'existence d'un courant volumique ce qui exclue celle d'un courant surfacique $\vec{j}_s=\vec{0}$.
la continuité de $\vec{B}$ en $z=L$ s'écrit :

$$\underline{\vec{B}}_i(x,y,L,t) + \underline{\vec{B}}_r(x,y,L,t) = \underline{\vec{B}}_t(x,y,L,t)$$

en simplifiant $(//\vec{u}_x)$:

$$-k_g E_i^0 \exp ik_g L + k_g \underline{E}_r^0 \exp -ik_g L = -\frac{1+i}{\delta}\underline{E}_t^0 \exp -\frac{L}{\delta} \quad \exp i\frac{L}{\delta}$$

3.3.5 on en déduit que :

$$\underline{r} = \frac{k_g - \frac{1+i}{\delta}}{k_g + \frac{1+i}{\delta}} \quad \exp -2ik_g L$$

$$\underline{t} = \frac{2k_g}{k_g + \frac{1+i}{\delta}} \quad \exp ik_g L \quad \exp \frac{1-i}{\delta}L$$

3.3.6 on a :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})[\exp i(k_g z-\omega t) \ + \ \underline{r} \ \exp -i(k_g z+\omega t)]\vec{u}_y$$

or : $\underline{r} = re^{i\psi}$ donc :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})[\ \exp i(k_g z-\omega t) \ + \ r \ \exp -i(k_g z+\omega t-\psi)]\vec{u}_y$$

soit :

$$\vec{E} = \Re e(\underline{\vec{E}}) = E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})[\ \cos(k_g z-\omega t) \ + \ r \ \cos(k_g z+\omega t-\psi)]\vec{u}_y$$

3.3.7 on a :

$$r = |\underline{r}| = \sqrt{\frac{(1-k_g\delta)^2+1}{(1+k_g\delta)^2+1}} \leq 1$$

3.3.8 par trigonométrie :

$$\vec{E} = E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})[\ \cos(k_g z - \omega t)\ +\ r\ \cos(\psi - k_g z - \omega t)]\vec{u}_y$$

$$= E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})\ \vec{u}_y\ \{\underbrace{[\cos(k_g z) +\ r\ \cos(\psi - k_g z)]} \cos\omega t + \underbrace{[\sin(k_g z) +\ r\ \sin(\psi - k_g z)]} \sin\omega t\}$$

$$= E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})\ \vec{u}_y\ \{A(z)\ \cos\omega t +\ B(z)\ \sin\omega t\}$$

$$= E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})\ \vec{u}_y\ \sqrt{A^2+B^2}\ \cos(\omega t - \xi)$$

tel que : $\tan\xi(z) = B/A$

il vient :

$$\vec{E} = \underbrace{E_i^0 \sin(\frac{\pi x}{a})\ \sqrt{1+r^2+2r\cos(2k_g z - \psi)}}\ \cos(\omega t - \xi)\ \vec{u}_y$$

l'onde dans le guide possède une amplitude qui dépend de z, ceci s'explique par la superposition de deux ondes : incidente et réfléchie.

3.3.9 un ventre correspond à E_{max} donc :

$$\cos(2k_g z_V - \psi) = 1 \Rightarrow 2k_g z_V - \psi = 2\pi n \Rightarrow z_V = \frac{2\pi n + \psi}{2k_g} = n\ \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\psi}{2k_g}$$

avec n un entier.

un noeud correspond à E_{min} donc :

$$\cos(2k_g z_N - \psi) = -1 \Rightarrow 2k_g z_N - \psi = \pi + 2\pi n \Rightarrow z_N = \frac{2\pi(n+1/2)+\psi}{2k_g} = (n+\frac{1}{2})\ \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\psi}{2k_g}$$

avec n un entier.

la distance entre deux noeuds consécutifs : $\Delta = |z_N(n+1) - z_N(n)| = \frac{\lambda_g}{2}$

3.3.10 on a :

$$\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \sqrt{\frac{1+r^2+2r}{1+r^2-2r}} = \frac{1+r}{1-r} > 1$$

qui s'inverse en :

$$r = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

qui permet la mesure de r à partir de celle du $T.O.S$

3.3.11 $\lambda_g = 2\Delta = 4.22\ cm$, on calcule pour le mode TE_{10} d'après les données de la partie 3.3 : $k_g = \sqrt{(\frac{\omega}{c_0})^2 - (\frac{\pi}{a})^2} = 149\ m^{-1} \approx \frac{2\pi}{\lambda_g}$, les deux valeurs sont en accord.

3.3.12 on a d'après 3.3.7 :

$$r = \sqrt{\frac{(1-k_g\delta)^2+1}{(1+k_g\delta)^2+1}} \approx \sqrt{\frac{(1-2k_g\delta)+1}{(1+2k_g\delta)+1}} = \sqrt{\frac{1-k_g\delta}{1+k_g\delta}} \approx \sqrt{(1-k_g\delta)(1-k_g\delta)} = 1 - k_g\delta$$

donc : $\delta = \frac{1-r}{k_g}$

3.3.13 A.N :

$$\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \sqrt{\frac{A_{max}}{A_{min}}} = 44.4$$

$$r = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} = 0.96$$

$$\delta = \frac{1 - r}{k_g} = 2.96\ 10^{-4} m$$

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0 \delta^2 \omega} = 300\ S.m^{-1}$$

$$k_g \delta = 0.04 \ll 1$$

l'hypothèse est assez vérifiée.

fin du corrigé